Algebra liniowa II. Lista 1

Zadanie 1. Udowodnić, że jeśli $B = [b_{ij}]$ jest macierzą górnotrójkątną o rozmiarze $m \times m$, to jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$\det B = b_{11} b_{22} \cdots b_{mm}.$$

Zadanie 2. Udowodnić, że równanie charakterystyczne $\det(xI - B) = 0$ macierzy B z poprzedniego zadania ma pierwiastki $b_{11}, \ldots, b_{mm}$.

Zadanie 3. Oblicz iloczyn macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Wykaż , że zbiór $\mathbb{R}^3$ jest grupą z działaniem:

$$(x, y, z) \bullet (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w + xv).$$

Wyznacz centrum tej grupy. Wykaż, że grupa ta jest nieprzemienna.

Zadanie 5. Wykazać, że wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & k & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -(n-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -n & 0 \end{bmatrix}.$$

jest równy $(n!)^2$.

Zadanie 6. Wykazać, że równanie

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = 0$$

ma jedynie dwa rozwiązania: -1, 3.

Zadanie 7. Określić liczbę rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + y - z = p \\ x - y + pz = 1 \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru p.

Zadanie 8. Wykazać, że 1 i -1 są wartościami własnymi macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

Sprawdzić, że wektory $\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ są wektorami własnymi macierzy A.

Zadanie 9. Określmy macierz $F = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]$. Sprawdzić, że $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ oraz $F^{-1}AF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10. Wyznaczyć macierz A^{2013}.

Zadanie 11. Dano dwie liczby rzeczywiste a i b oraz ciąg $(\alpha_n \colon n = 1, 2, \ldots)$. Określmy macierze $M_n \in \mathsf{M}_{(n+1)\times(n+1)}$, $n = 1, 2, \ldots$, w następujący sposób:

$$M_n = \left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & \alpha_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & b \end{array}\right].$$

Niech $d_n = \det M_n$. Wykazać, że jeśli dodatkowo przyjąć $d_0 = b$, to dla $n \geqslant 1$ zachodzi następujący związek rekurencyjny

$$d_n = ad_{n-1} - \alpha_n^2 a^{n-1}.$$

Zadanie 12. Wykazać, że $d_n = a^n b - (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)a^{n-1}$, dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 13. Wykazać, że wartościami własnymi macierzy M_n są a z krotnością nie mniejszą niż $n-1$ oraz $\dfrac{a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4u_n^2}}{2}$, gdzie $u_n^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$.

Zadanie 14. Wykazać, że jeśli a jest pierwiastkiem krotności $n-1$, to zbiór V_a rozwiązań równania $M_n x = ax$ wyraża się następująco:

$$V_a = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1})\colon \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,\ x_{n+1} = 0\}.$$

Zadanie 15. Wykazać wzór Vandermonde'a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k,l=0 \\ k>l}}^{n} (a_k - a_l).$$

Wskazówka: Pomnóż przedostatni (n-ty) wiersz przez a_n i odejmij od ostatniego (Dlaczego wolno tak zrobić?), następnie pomnóż trzeci od końca przez a_n i odejmij od przedostatniego i tak dalej, aż w końcu pierwszy wiersz pomnożony przez a_n odejmij od drugiego. Uprość wyrażenie i zastosuj indukcję. Jeśli nie potrafisz, to wykaż prawdziwość wzoru dla $n = 2$.

Zadanie 16. Dla $a \in \mathbb{R}$, niech $T_a\colon \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, gdzie $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ jest przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej dwa o współczynnikach rzeczywistych, będzie określone wzorem $T_a(w)(x) = w(x-a)$. Wyznacz macierz A odwzorowania liniowego T_a w bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$, gdzie $\mathbf{f} = (1, x, x^2)$. Oblicz jej wyznacznik.

Zadanie 17. Wykazać, że jeśli macierz $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest antysymetryczna oraz n jest liczbą nieparzystą to $\det(A) = 0$. Wskazać przykład, że tak nie musi być w przypadku, gdy n jest parzysta.

Zadanie 18. Wykazać, że $u_1 = 0$, $u_2 = -\,\mathrm{i}\sqrt{3}$, $u_3 = \mathrm{i}\sqrt{3}$ są pierwiastkami równania

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ -1 & u & 1 \\ -1 & -1 & u \end{vmatrix} = 0.$$

Zadanie 19. Sprawdzić, że wektory $\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ są wektorami własnymi macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 20. Niech A, B oraz γ, δ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi i niech $\gamma \neq \delta$. Wykazać, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta - \gamma} \begin{bmatrix} \delta & -1 \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązać ponadto równanie wektorowe

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix}$$

o niewiadomych x, y.

Zadanie 21. Udowodnić, że macierz rzeczywista $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ ma dwie różne rzeczywiste wartości własne λ_1 i λ_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta^2 > -4\alpha$. Wykazać, że w takiej sytuacji wektory $(1, \lambda_1)$ oraz $(1, \lambda_2)$ są wektorami własnymi macierzy M odpowiadającymi wartościom własnym λ_1 i λ_2.

Zadanie 22. Określmy ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ indukcyjnie:

$$a_0 = A, \qquad a_1 = B, \qquad a_{n+1} = \alpha a_{n-1} + \beta a_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Sprawdzić, że

$$M \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad M^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \text{dla } n \geqslant 1,$$

gdzie M jest macierzą określoną w poprzednim zadaniu. Wyznaczyć wzór na a_n przy założeniu, że $A = 1$ oraz $B = \lambda_1$, gdzie λ_1 jest wartością własną macierzy M.

Zadanie 23. Niech $V = \operatorname{lin}\{\mathrm{e}^x, x\,\mathrm{e}^x, \ldots, x^n\,\mathrm{e}^x\}$. Uzasadnić, że wymiar przestrzeni V jest równy $n+1$. Wykazać, że odwzorowanie D określone na V wzorem $D(f) = f'$ jest endomorfizmem przestrzeni liniowej V.

Zadanie 24. Wykazać, że wyznacznik $\det D$ odwzorowania D jest równy 1. (Wskazówka: Wyznacz macierz odwzorowania D względem bazy $\mathrm{e}^x, x\,\mathrm{e}^x, \ldots, x^n\,\mathrm{e}^x$.)

Zadanie 25. Dano macierz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że macierz do niej odwrotna ma postać

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wyznaczniki tak A jak i A^{-1}.

Zadanie 26. Sprawdzić, że $\boldsymbol{u} = (1, 1, -1)$ jest wektorem własnym macierzy A^{-1} z poprzedniego zadania.

Zadanie 27. Ciąg wektorów $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, \ldots$ jest zadany indukcyjnie:

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{u}, \qquad A\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{p}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gdzie A jest jak w zadaniu 25. Znajdź wzór na wyraz ogólny $\boldsymbol{p}_n$ tego ciągu.

Zadanie 28. Załóżmy, że liczby a, b, c, d spełniają związki

$$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= 0, \\ c\sin x + d\cos x &= 0, \end{aligned}$$

dla pewnej liczby x. Wykazać, że $ad - bc = 0$

Zadanie 29. Niech $v(x)$ oraz $w(x)$ będą wielomianami. Udowodnić, że jeśli przynajmniej jeden z tych wielomianów jest niezerowy, to funkcja $v(x)\sin x + w(x)\cos x$ jest niezerowa.